

2. L'antica "ottica"

2.1 Un modello matematico della percezione visiva

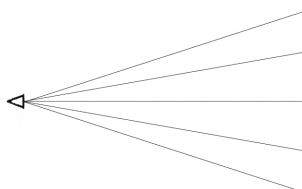
L'*Ottica* di Euclide è un testo poco conosciuto ma importante perché fa capire meglio il metodo usato negli *Elementi*. L'*Ottica*, infatti, presenta lo stesso rapporto tra teoria, modello e realtà degli *Elementi*. In epoca ellenistica la divisione tra matematica e fisica era inesistente mentre l'idea moderna di questa separazione ha reso poco comprensibile il testo euclideo dell'*Ottica*. L'ottica, inoltre, rappresenta una tipica applicazione della geometria euclidea che oggi è insegnata priva di motivazioni e applicazioni.

I postulati, nell'*Ottica*, sono stranamente chiamati con il termine usualmente impiegato per le definizioni. Il primo potrebbe essere corrotto¹: "Sia stato supposto che le linee rette condotte fuori dall'occhio si muovano per un intervallo di grande grandezza"². Vedremo più avanti perché e come è possibile emendare questa definizione. La "definizione" 2 recita invece: "E che la figura compresa dai raggi visivi sia un cono che ha vertice nell'occhio, e la base sui limiti di ciò che è visto"³.

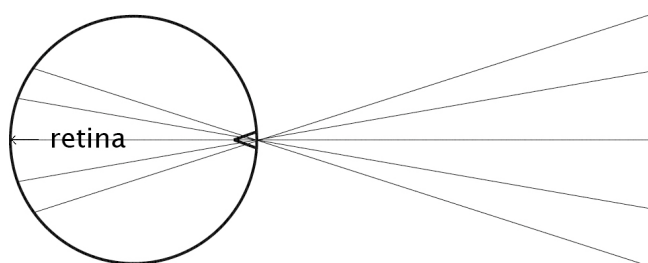
Il concetto fondamentale è quello di raggio visivo. L'ottica non va qui intesa nel significato moderno di teoria della luce, ma come teoria della visione, ovvero come un modello matematico della percezione visiva.

Ha importanza fondamentale la "definizione" 4: "E ciò che è visto sotto un angolo maggiore appaia maggiore, quello sotto <un angolo> minore minore, e uguale ciò che è visto sotto angoli uguali"⁴. Quella di grandezza angolare è una delle prime applicazioni del concetto di angolo. Platone sosteneva che fosse possibile fare scienza solo a proposito di ciò che è misurabile e non delle apparenze. Euclide riesce a misurare anche le apparenze definendo la grandezza apparente come un angolo.

La definizione 7, l'ultima, dice: "E che ciò che è visto sotto più angoli appaia con maggiore precisione"⁵. È evidente, quindi, che i raggi visivi formano un insieme discreto. Un'idea che è stata vista come arcaica e sbagliata ma solo per la difficoltà che c'è nel capire la scienza antica. Nei libri sull'ottica antica i raggi visivi sono abitualmente illustrati con una figura di questo tipo:



Ma se disegniamo l'intero globo oculare e prolunghiamo i raggi visivi otteniamo un'immagine come la seguente:



¹ Vedi Silvio M. Medaglia-Lucio Russo, *Sulla prima "definizione" dell'Ottica di Euclide*, in "Bollettino dei Classici", Accademia dei Lincei, 16 (1995), pp. 41-54.

² Euclide, *Tutte le opere*, cit., p.2025.

³ *Ibidem*

⁴ *Ibidem*

⁵ *Ibidem*

Effettivamente i fotorecettori sulla retina costituiscono un insieme finito. L'informazione che giunge al cervello è quindi maggiore o minore in base al numero di recettori che si attiva. Un confronto tra le definizioni 4 e 7 mostra che per Euclide non sempre gli oggetti visti sotto angoli maggiori sono visti con più raggi visivi. La distinzione tra grandezza e nitidezza è perciò giustificata considerando i raggi visivi come un insieme discreto, non uniformemente distribuito.

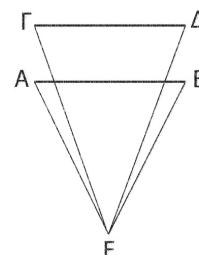
Tornando alla prima definizione, si può supporre che l'enunciato originale intendesse dire che i raggi sono posti a distanza angolare variabile. Il testo della definizione pervenuto può infatti essere interpretato come una corruzione di una frase greca che può essere tradotta: "Sia stato supposto che le linee rette condotte fuori dall'occhio si estendano con distanze (angolari) reciproche molto diverse"⁶.

In effetti esiste una prefazione all'*Ottica* che, pur essendo considerata spuria, può forse risalire agli insegnamenti euclidei in cui si trovano numerose osservazioni spiegabili ipotizzando che i raggi visivi siano più fitti al centro. C'è poi un altro motivo per congetturare che questa fosse l'idea di Euclide: egli è infatti contemporaneo e concittadino di Erofilo di Calcedonia che, tra l'altro, ha scritto un trattato sull'occhio nel quale studia la retina. Erofilo che – come abbiamo visto nella lezione precedente – inventa un gran numero di termini medici, indica la retina con il nome greco per "ragnatela" (ἀραχνοειδής): una struttura la cui caratteristica essenziale è quella di essere più fitta al centro. È in effetti chiaramente visibile l'infittirsi dei vasi sanguigni al centro della retina. Nella traduzione "retina" c'è quindi una banalizzazione del significato, mentre quello della ragnatela è un modello che rende conto anche della perdita di dettagli nella visione periferica.

Dalle definizioni, Euclide trae vari teoremi. Vediamo la proposizione 5:

Grandezze uguali a distanza diversa appaiono disuguali, e maggiore sempre quella posta più vicina all'occhio.

Siano due grandezze uguali AB , $\Gamma\Delta$, e sia un occhio in E , da cui risultino a distanza diversa, e sia AB la più vicina. Dico che AB apparirà maggiore. Consideriamo i raggi incidenti AE , EB , $E\Gamma$, $E\Delta$. Poiché ciò che è visto sotto un angolo maggiore appare maggiore, e l'angolo AEB è maggiore di $\Gamma E\Delta$, AB apparirà maggiore di $\Gamma\Delta$ ⁷.



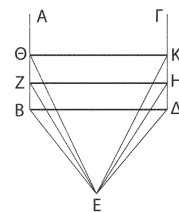
Le affermazioni dell'ottica sono meno generali di quelle degli *Elementi* e tendono a valere solo per le figure presentate.

2.2 Alle origini della prospettiva

Trascriviamo la proposizione 6 (la dimostrazione è omessa):

Intervalli paralleli visti a distanza appaiono di larghezze diverse.

Siano AB , $\Gamma\Delta$, due grandezze parallele e sia un occhio in E . Dico che AB , $\Gamma\Delta$ appaiono di larghezza diversa, e l'intervallo più vicino appare maggiore di quello più lontano (...)⁸



⁶ Basta per questo supporre che la strana espressione "μεγεθῶν μεγάλων" trasmessa dai manoscritti sia stata ottenuta corrompendo un originale "μεγεθῶν μεγ'ἀλλοίων". Vedi Silvio M. Medaglia-Lucio Russo, *Sulla prima "definizione" dell'Ottica di Euclide*, cit.

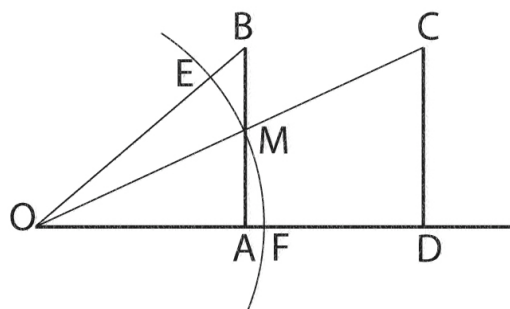
⁷ Euclide, *Tutte le opere*, cit., p. 2029 (traduzione modificata).

⁸ *Id.*, p. 2029-2031 (traduzione modificata).

Questa proposizione rappresenta un primo passo verso la teoria della prospettiva. Euclide non la sviluppa, ma sappiamo che esisteva un termine, scenografia, che si riferiva proprio a questa applicazione.

Per quanto riguarda il concetto di grandezza angolare, è interessante leggere la proposizione 8: “Grandezze uguali e parallele a distanze diverse dall’occhio non sono viste proporzionalmente alle distanze”⁹.

Non esiste, cioè, una proporzionalità inversa tra angolo e distanza (usando la terminologia moderna: la tangente non è una funzione lineare). Qui Euclide mostra una bella tecnica dimostrativa.



Devo dimostrare che $\hat{BOA}/\hat{C\hat{O}D} \neq OD/OA$

Si ha da una parte $OD/OA = DC/MA = BA/MA = BOA/MOA$,
dove con BOA e MOA sono indicati i triangoli

$$BOA/MOA = BOM + MOA/MOA = 1 + BOM/MOA$$

E dall'altra $\hat{BOA}/\hat{C\hat{O}D} = EOF/MOF$,
dove con EOF e MOF sono indicati i settori circolari

$$EOF/MOF = 1 + EOM/MOF.$$

Il risultato segue quindi dall'ovvia disuguaglianza $EOM/MOF < BOM/MOA$.

Si tratta di una dimostrazione intuitiva, non algebrica.

Nel 1927 il grande intellettuale Erwin Panofsky¹⁰ sostenne che la prospettiva antica era in contraddizione con quella rinascimentale perché ritenne che la proposizione 8 di Euclide che abbiamo appena visto contraddicesse l'affermazione di Piero della Francesca che l'altezza delle raffigurazioni degli oggetti in un quadro fosse inversamente proporzionale alla reale distanza degli oggetti, e questa affermazione servì a sostenere la relatività di tutte le culture. Ma Piero della Francesca, la cui trattazione si basa proprio su Euclide, si riferisce a grandezze lineari, non angolari. Se cioè debbo dipingere un uomo a distanza doppia, dovrò ritrarlo alto la metà ma non per questo lo vedrò sotto un angolo dimezzato.

Ogni cultura può avere la sua pittura, ma la prospettiva – per come è definita – è unica. Quello di Panofsky è dunque un buon esempio dei danni che può provocare la scissione tra le due culture. Peraltro in anni recenti, nel 1961, è stato riscoperto un affresco al Palatino che contraddice le idee dello studioso mostrando un'antica applicazione della prospettiva usualmente detta “rinascimentale”: la Stanza delle Maschere presso la Casa di

⁹ *Id.*, p. 2033 (traduzione modificata).

¹⁰ Cfr. Erwin Panofsky, *La prospettiva come forma simbolica*, Abscondita, SE, Milano, 2007.

Augusto. L'affresco – lungo circa 5 metri – presenta un punto di fuga unico a cui convergono tutte le rette di profondità. È possibile che la costruzione sia stata effettuata grazie ad accorgimenti tecnici quali un chiodo piantato nel muro al quale fissare funi¹¹.

Si può dire che certamente esiste una dipendenza dalla cultura non solo dell'arte ma anche della matematica, ma bisogna capire in che senso. Se anche in matematica i problemi possono nascere dal contesto storico, le soluzioni sono però universali. Vi sono insomma nella scienza molti gradi di libertà in relazione ai problemi da porsi e agli strumenti attraverso i quali risolverli ma non si è liberi di cambiarne le soluzioni.

2.3 I rapporti tra matematica e fisica in epoca antica e moderna

Ma l'*Optica* di Euclide è matematica o fisica? Si tratta, come detto, di un modello matematico della percezione visiva, come gli *Elementi* sono un modello matematico del disegno con riga e compasso. Le due teorie hanno il medesimo status epistemologico. I termini “matematica” e “fisica” avevano un significato profondamente diverso. L'aggettivo “fisico” in greco corrisponde esattamente al nostro “naturale”. Gli stoici distinguevano la filosofia in tre settori: logica, etica e fisica. La fisica come parte della filosofia può essere quindi tradotta come filosofia della natura ed è questo il significato che la parola ha nel titolo dell'opera di Aristotele dalla quale abbiamo ereditato il termine. Matematica è invece, etimologicamente, tutto ciò che richiede studio: l'unità è di metodo, non nell'oggetto. È matematica tutto ciò su cui posso dimostrare teoremi, cioè la scienza esatta. L'antica “matematica” comprendeva, oltre all'aritmetica e alla geometria, discipline come l'astronomia, la meccanica, l'ottica, l'idrostatica e la teoria musicale; includeva, cioè, quella che oggi chiamiamo fisica. La scissione tra matematica e fisica, avvenuta all'epoca di Newton, rischia, da una parte, di sottrarre alla matematica il suo rapporto con la realtà e dall'altra a eliminare le dimostrazioni dalle modellizzazioni dei fenomeni. Oggi, ad esempio, si studia il “principio di Archimede”, mentre nell'opera originale di Archimede esso costituiva l'enunciato di un teorema (del quale era ovviamente fornita la dimostrazione). Questa unità metodologica andrebbe recuperata.

La disciplina della storia della scienza soffre del difetto di attribuire la maggior parte dei risultati a pochi eroi eponimi. Il ruolo di Newton, in questo senso, è stato molto sopravvalutato. Il titolo della sua principale opera, *I principi matematici della filosofia naturale*, mostra che Newton si considera in fondo un filosofo della natura. Egli credeva di affermare verità assolute sulle cose, non di realizzare modelli per descrivere i fenomeni. La sua famosa frase “Hypotheses non fingo” mostra che, ai suoi tempi, la parola “ipotesi” indica già qualcosa che può essere sia vero sia falso. Nella scienza antica, l'ipotesi era ciò che sta a fondamento della teoria. Etimologicamente il significato greco di *hypòthesis* (ὑπόθεσις) è infatti *hypò*=sotto e *thèsis*=posizione, dunque fondamento. Il significato moderno nasce da un impoverimento epistemologico, poiché per i greci era evidente che i fenomeni non individuano univocamente la teoria, in quanto più teorie possono spiegare i medesimi fenomeni, come aveva sostenuto già Epicuro. All'epoca di Newton si capisce che le antiche “ipotesi” (cioè i principi delle antiche teorie) non erano concepite come verità assolute, ma banalizzando il rapporto tra teoria e realtà se ne deduce che le “ipotesi” siano affermazioni della cui verità non si è certi. Il termine “ipotesi” cambia così significato. Poiché l'antica “matematica” (ossia l'antica scienza) era basata su ipotesi, Newton, che è anche un teologo e cerca verità assolute, decide di non fare “ipotesi” e

¹¹ Per questa congettura e per una discussione sull'errore di Panofsky in riferimento all' *Optica* euclidea vedi Franco Ghione – Laura Catastini, *In obscurum coni conduxit acumen (ovvero l'infinito in un punto)*, “Lettera matematica Pristem,” n.72, consultabile integralmente su: <http://matematica-old.unibocconi.it/interventi/Ghione/CatastiniGhione.html>.

rifiutando il metodo dell'antica "matematica" scrive un libro di "filosofia della natura", disciplina che, come la teologia, ritiene di poter giungere a verità assolute sul mondo. la storia della scienza in genere sopravvaluta la novità del metodo sperimentale moderno. Il metodo sperimentale esisteva anche nell'antichità, purché naturalmente ci si intenda su cosa significa questa espressione. Se per "metodo sperimentale" si intende quello usato da Galileo, allora è difficile negare che fosse usato anche da Archimede, Filone di Bisanzio ecc.. Ma mentre nell'antichità gli esperimenti suggerivano la creazione di un modello all'interno del quale si dimostravano teoremi (come ad esempio nell'idrostatica archimedeica), in epoca moderna si crede di poter dedurre l'unica teoria vera univocamente dai fenomeni. Duhem e Quine¹² hanno recuperato, nel Novecento, il concetto della sottodeterminazione delle teorie, l'idea cioè che esse non siano determinate univocamente dai fenomeni: non a caso, Duhem era uno studioso della scienza antica.

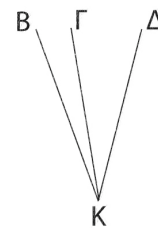
Per quanto riguarda il calcolo integrale e differenziale, in genere attribuito a Newton e a Leibniz, metodi infinitesimali si trovano già in Archimede (gli sviluppi più avanzati sono nel trattato *Sulle spirali*, in cui vi è ad esempio il confronto tra infinitesimi di ordine diverso). Naturalmente l'analisi matematica moderna è qualcosa di nuovo. Essa nasce dal recupero delle opere archimedee, ma operando due fondamentali modifiche: innanzitutto mentre Archimede lavora con rigore su casi particolari, i moderni preferiscono conquistare una maggiore generalità a prezzo di un crollo nel rigore. Le due cose sono strettamente connesse. Cambia inoltre il rapporto tra geometria e metodi numerici. Rispetto ai metodi antichi il baricentro della matematica si sposta dalla geometria ai metodi numerici. Il rigore sarà recuperato solo nell'800 grazie alla creazione della teoria dei numeri reali (nata dal recupero del libro V degli *Elementi* di Euclide). Mentre un autore come Mengoli¹³ può ancora essere rigoroso perché si occupa di casi particolari, con Newton il passaggio alla matematica "moderna", priva di rigore e interessata ad enunciati molto generali è pienamente compiuto. Si tratta del tipo di matematica che sarà sviluppato nel Settecento e nel primo Ottocento.

2.4 Una prima affermazione della relatività del moto

La proposizione 51 dell'Optica presenta un enunciato lontano dall'essere banale, anche se la sua dimostrazione è molto semplice:

Qualora, muovendosi più grandezze con velocità diversa, si muova nella stessa direzione anche l'occhio, quelle che si muovono con la stessa velocità dell'occhio sembreranno ferme, quelle che si muovono più lentamente sembreranno muoversi all'indietro e quelle più veloci in avanti.

Si muovano infatti con velocità diversa B, Γ , Δ e sia B più lenta dell'occhio K, e Γ ugualmente veloce dell'occhio K, Δ più veloce. Dall'occhio K incidano i raggi KB, K Γ , K Δ . Γ , che si muove come l'occhio, sembrerà ferma, B, che resta indietro, sembrerà muoversi in <verso> opposto, e Δ , che è stata supposta muoversi più velocemente, sembrerà andare avanti¹⁴.



¹² Pierre Duhem (1861-1916) è stato matematico, fisico nonché storico e filosofo della scienza; Willard Van Orman Quine (1908-2000) è stato un filosofo analitico. Le loro tesi epistemologiche sono spesso lette in contrasto al falsificazionismo di Popper.

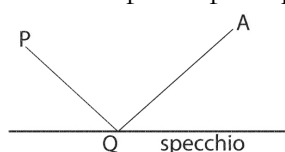
¹³ Pietro Mengoli (1626-1686), allievo di Cavalieri, si dedicò allo studio di serie e ai procedimenti di integrazione. Cfr. Lucio Russo-Emanuela Santoni, *Ingegni minuti – Una storia della scienza in Italia*, Milano, Feltrinelli, 2010, pp.178 e sgg.

¹⁴ Euclide, *Tutte le opere*, cit., p. 2105 (traduzione modificata).

Si tratta di un primo livello di relatività del moto. Poiché Euclide ha scritto anche di astronomia, probabilmente pensava anche ad applicazioni astronomiche della proposizione. Alla sua epoca si cominciava, infatti, a proporre il moto di rotazione diurna della Terra. In un passo di Galeno vi è la testimonianza che anche Erofilo stava riflettendo sugli stessi problemi, ponendo la questione della difficoltà di decidere su cosa sia effettivamente fermo o in moto. Galeno, che scrive nel II secolo d.C., non capisce la sua fonte e ne conclude che, poiché Erofilo sostiene che non è possibile affermare né di vedere un corpo in moto da fermo, né di vedere un corpo fermo essendo in moto, seguendo la sua opinione bisognerebbe concludere che non sia possibile vedere nulla! C'è una chiara analogia tra la nascita del convenzionalismo (riconoscimento dell'arbitrarietà dei termini con i quali si possono designare gli oggetti) e l'idea della relatività del moto (riconoscimento che si può scegliere arbitrariamente quale corpo considerare fermo). Il crollo culturale che già Galeno testimonia ha avuto conseguenze per oltre un millennio e mezzo.

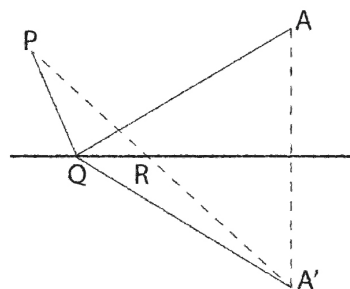
2.5 Sviluppi dell'ottica successivi a Euclide

Per i greci l'ottica riguarda la visione diretta, tuttavia la terminologia è oscillante. Molti hanno scritto di ottica fino ai tempi di Tolomeo, ma ci sono rimasti pochi di questi lavori intermedi. Risultati importanti sulla riflessione dovevano essere nella *Catoptrica* di Archimede che probabilmente ci è stata trasmessa in parte dal trattato di Erone sugli specchi. Si trova qui l'idea che la legge di riflessione si può dedurre da un principio di minimo: il primo principio di minimo della storia della scienza.



Il teorema dice che il percorso più breve tra quelli che da un punto P giungono a un punto A toccando lo specchio, è quello che rispetta la legge della riflessione (l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione).

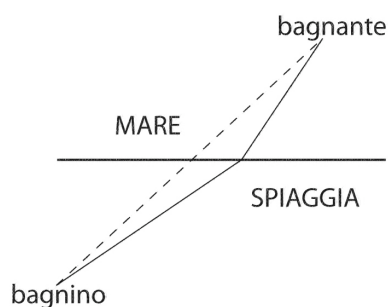
La dimostrazione è molto semplice. Se un raggio proveniente da P giunge in A dopo essersi riflesso sullo specchio in Q, la lunghezza della spezzata PQA è evidentemente uguale a quella della spezzata PQA', dove A' è il punto simmetrico ad A rispetto allo specchio. È quindi evidente che il cammino minimo si ha quando il punto Q in cui il raggio si riflette coincide con il punto R, intersezione della PA' con lo specchio. Si vede facilmente che in questo caso l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.



Ci è stata tramandata anche un'altra dimostrazione della legge di riflessione attribuita ad Archimede e basata sul principio di reversibilità del cammino ottico. La semplice legge di riflessione è stata quindi l'occasione per introdurre due idee che saranno fondamentali nello sviluppo di tutta la fisica successiva: principio di minimo e principio di reversibilità.

Per quanto riguarda la legge di rifrazione, abitualmente attribuita a Cartesio o a Snell, sicuramente era conosciuta dall'ottico arabo Ibn Sahl che la cita come cosa nota nella sua opera sugli strumenti ustori che risale agli anni 982-986 d.C. Tuttavia non doveva essere nota a tutti i sapienti arabi e questo sembra un indizio del fatto che Ibn Sahl potrebbe averla tratta da una fonte antica non molto diffusa. Dal modo in cui Ibn Sahl la cita appare chiaro che la legge fosse stata dedotta da un principio di minimo.

Didatticamente può essere utile introdurre questa deduzione considerando il classico problema del bagnino: come fa a raggiungere nel più breve tempo possibile il bagnante in pericolo?



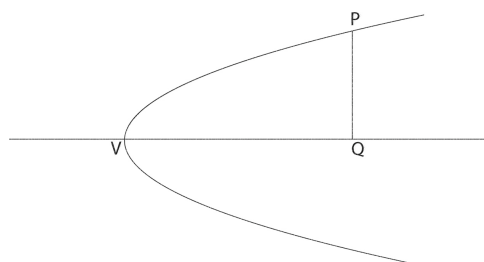
È evidente che poiché il bagnino corre con una velocità superiore a quella con cui nuota, non gli conviene seguire un percorso rettilineo. Calcolando il percorso che comporta il tempo minimo si ritrova la legge di rifrazione. La deduzione può essere effettuata agevolmente usando il concetto di derivata, ma didatticamente può essere forse interessante recuperare la dimostrazione di Huygens che è puramente sintetica ed euclidea.

Una fonte interessante sull'antichità della legge ci è fornita da Roberto Grossatesta¹⁵ il quale sostiene che l'ottica si divide in tre parti, di cui la terza – ignota ai latini ma nota ad Aristotele – consente di costruire strumenti per vedere oggetti piccoli e lontani. Successivamente enuncia un'assurda legge della rifrazione secondo la quale l'angolo di rifrazione non dipenderebbe dalla sostanza rifrangente. Ora, è poco plausibile l'attribuzione ad Aristotele, ma è probabile che egli avesse una fonte greca antica della quale non ha capito il senso. È interessante notare che Grossatesta afferma che tutte le leggi dell'ottica possano essere dedotte da principi di minimo. Probabilmente gli era giunta un'eco distorta della deduzione nota a Ibn Sahl. Nei manuali si trova ancora che la legge di rifrazione sia da attribuire a Snell (o addirittura a Cartesio), mentre Fermat l'avrebbe dedotta per primo da un principio di minimo. Può essere interessante recuperare la dimostrazione di Huygens che è puramente sintetica ed euclidea e non fa uso di derivate.

2.6 Applicazioni: lo studio della parabola in tempi antichi e moderni

2.6.1 Proprietà caratteristica della parabola.

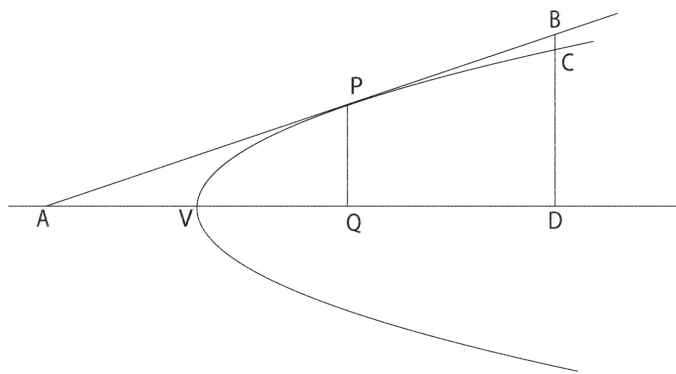
Già Archimede e Apollonio conoscevano la proprietà che è considerata “caratteristica” della parabola cioè quella espressa dalla relazione $PQ^2/VQ = \text{cost}$.



La costante è un segmento, detto lato retto. La proprietà caratteristica è ovviamente equivalente a quella che oggi viene detta equazione della parabola; la differenza è nell'inversione del ruolo tra la curva e gli enti numerici. Mentre nell'antichità l'ente fondamentale è la parabola, in epoca moderna si tende a vedere la curva come grafico della funzione $y=x^2$.

Problema: Costruire la tangente della parabola in un punto dato. La formulazione riportata segue quella di Apollonio (200 a.C circa).

¹⁵ Roberto Grossatesta (1175-1253) fu vescovo di Lincoln, teologo, scienziato e statista. I suoi lavori di argomento scientifico risalgono soprattutto agli anni 1220-1235.



Costruzione:

Sia P un punto di una parabola di cui indichiamo con V il vertice e con VD l'asse di simmetria.

Sia Q la proiezione ortogonale di P sull'asse.

Diciamo A il punto dell'asse simmetrico a Q rispetto a V.

La retta AP è la tangente alla parabola nel punto P.

Dimostrazione:

Per dimostrare che la retta AP è tangente alla parabola devo dimostrare che se per un qualsiasi altro punto C della parabola traccio la retta ortogonale all'asse, detti B e D le sue intersezioni rispettivamente con la retta AP e con l'asse, si ha sempre $CD < BD$ o, che è lo stesso, $CD^2/VD < BD^2/VD$.

Poiché, per la caratteristica, $CD^2/VD = PQ^2/VQ$ l'ultima diseuguaglianza può anche scriversi $PQ^2/VQ < BD^2/VD$ ossia $(BD/PQ)^2 > VD/DQ$.

D'altra parte è $BD/PQ = AD/AQ = AD/2AV$

Basta quindi dimostrare che $(AD/2AV)^2 > VD/VQ$.

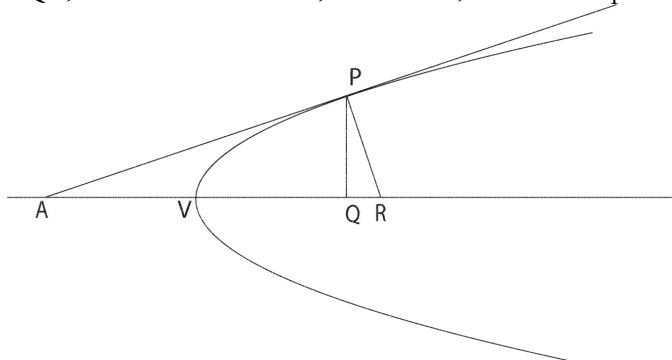
Cioè, essendo $AV = VQ$, $(AD/2)^2 > AV \cdot VD$.

L'ultima relazione è certamente vera poiché un rettangolo non quadrato ha area minore del quadrato con lo stesso perimetro.

In *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*¹⁶ Galileo riporta questa dimostrazione, sottolineando l'importanza dello studio di Euclide.

2.6.2 Costanza della sottonormale

Usando le stesse notazioni della figura precedente, sia R l'intersezione dell'asse della parabola con la retta ortogonale alla parabola (cioè alla sua tangente) nel punto P. La precedente costruzione della tangente implica facilmente che la lunghezza del segmento QR, detto sottonormale, è costante, cioè non dipende dalla scelta del punto P.



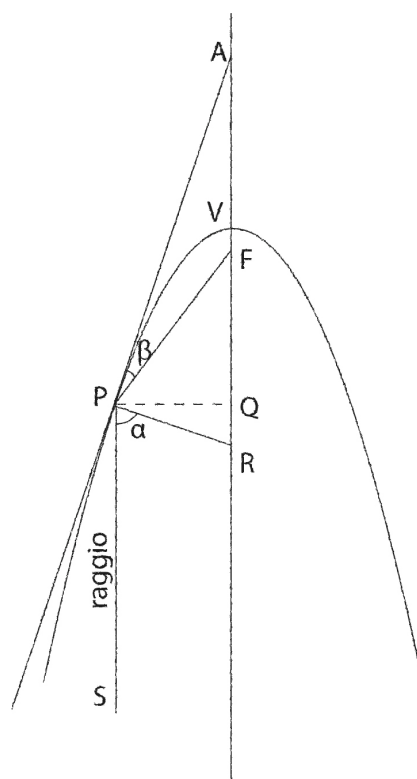
Infatti, poiché APR è un triangolo rettangolo, si ha $PQ^2 = AQ \cdot QR$.

Per la proprietà caratteristica della parabola è allora $AQ \cdot QR / VQ = \text{cost}$ e poiché $AQ = 2VQ$ anche QR è costante.

¹⁶ Pubblicato a Leida nel 1638, il testo è oggi consultabile integralmente su http://it.wikisource.org/wiki/Discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_scienze. I brani indicati si trovano nella giornata quarta (*Del violento, o vero dei proietti*).

2.6.3 Proprietà focale della parabola

La dimostrazione seguente, che usa le stesse notazioni delle figure precedenti, è tratta dal trattato di Diole sugli specchi ustori.



Supponiamo che la parabola sia ottenuta come sezione di una superficie speculare. Il raggio di luce SP parallelo all'asse della parabola sia riflesso nel punto F dell'asse.

Se R è il punto di intersezione dell'asse con l'ortogonale alla parabola nel punto P, per la legge della riflessione è allora $\angle SPR = \alpha = \angle RPF$.

D'altra parte $\angle SPR = \angle PRF$ perché angoli alterni interni. Il triangolo PRF è quindi isoscele ed è $PF = FR$.

L'angolo $\beta = \angle APF$ è complementare di $\alpha = \angle RPF$. Ma anche $\angle PAQ$ è complementare di α . Quindi anche $\triangle PAF$ è isoscele.

Si ha quindi $PF = FR = AF$.

Poiché V è il punto medio di AQ (per il procedimento di costruzione della tangente) e F è il punto medio di AR, $VF = 1/2 QR$.

Poiché QR (sottonormale) è costante, anche VF non dipende dalla scelta del punto P. Tutti i raggi paralleli all'asse saranno quindi riflessi nello stesso punto F, che dista dal vertice della parabola metà della sottonormale.

Abbiamo così dimostrato che con una superficie riflettente a forma di paraboloide si può costruire uno specchio ustore che concentra tutti i raggi del sole in un punto che per questo motivo è detto fuoco.

È probabile che questa dimostrazione risalga alla *Catoptrica* di Archimede poiché Diole usa la terminologia archimedeica, non quella di Apollonio. A partire dalla proprietà focale posso costruire parabolidi, ad esempio usando molti specchi fissati a una superficie curvabile. Cavalieri utilizzava uno strumento, il parabolografo, poiché ancora si discutevano questi problemi. Cavalieri fece anche un'ipotesi per avvalorare il racconto mitico di Archimede che utilizza gli specchi ustori per incendiare le navi romane all'assedio di Siracusa. Secondo Cavalieri l'impresa sarebbe stata possibile utilizzando un sistema di due specchi ustori, dei quali uno concentrava i raggi e l'altro agiva come riflettore.

L'uso di specchi a forma di paraboloide come riflettori è probabilmente alla base del meccanismo del famoso Faro di Alessandria, considerato uno delle meraviglie del mondo antico. Il riflettore si ottiene in effetti da uno specchio ustore applicando la reversibilità del cammino ottico. Può anche darsi che questa funzione abbia preceduto quella degli specchi ustori, usati forse per accendere fuochi.